

Zestaw II

Zadania przykładowe z rozwiązaniami

Zadanie 1

Dokonano pomiaru masy ciała 8 szczurów laboratoryjnych. Uzyskano następujące wyniki w gramach: 170, 180, 160, 190, 210, 200, 185, 195. Wyznaczyć przeciętną masę ciała wśród zbadanych szczurów.

Wyniki podane są w postaci szeregu szczegółowego, nie obserwujemy wartości skrajnych (odstających), jako miarę przeciętną wybieramy więc średnią arytmetyczną:

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot (170 + 180 + 160 + 190 + 210 + 200 + 185 + 195) = \frac{1490}{8} = 186,2 \text{ [g]}.$$

Odpowiedź: Przeciętna masa ciała w grupie przebadanych szczurów wynosi 186,2 g.

Zadanie 2

Średnia liczba punktów pewnego testu uzyskana na I roku studiów grupy A wyniosła 4,2, a grupy B: 3,1. Jaka jest przeciętna liczba punktów testu liczona dla dwóch grup łącznie, jeżeli grupa B była 1,5-krotnie liczniejsza?

Ponieważ obie grupy mają różną liczebność, konieczne jest zastosowanie średniej arytmetycznej ważonej, w której wagami będą liczebności poszczególnych grup n_i . Przyjmując, że pierwsza grupa ma liczebność n_1 , druga ma liczebność $n_2 = 1,5 \cdot n_1$, wartość przeciętna wynosi:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^2 \bar{x}_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^2 n_i} = \frac{\bar{x}_1 \cdot n_1 + \bar{x}_2 \cdot n_2}{n_1 + n_2} = \frac{4,2 \cdot n_1 + 3,1 \cdot 1,5 \cdot n_1}{n_1 + 1,5 \cdot n_1} = 3,54$$

Odpowiedź: Przeciętna liczba punktów wynosi 3,54.

Zadanie 3

Oceniono stężenie peptydu natriuretycznego typu B (NT-pro BNP) w surowicy osób z ostrym zespołem wieńcowym uzyskując następujące wyniki: 10^2 , 10^2 , 10^2 , 10^2 , 10^2 , 10^2 , 10^3 , 10^3 , 10^3 , 10^4 , 10^4 , 10^4 , 10^5 , 10^5 [pg/ml]. Wyznacz przeciętny poziom stężenia tego peptydu w tej grupie chorych.

Ponieważ rozkład wyników wykazuje niesymetryczność (prawoskośność), prawy ogon histogramu jest znacznie dłuższy i maleje wolniej niż jego lewy ogon, a ponadto wartości

Zestaw II

stężenia NT-pro BNP są wielokrotnościami poprzednich (różnią się o rząd jednostek), jako wartość przeciętną zastosujemy średnią geometryczną dla szeregu szczegółowego:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[14]{(10^2)^6 \cdot (10^3)^3 \cdot (10^4)^3 \cdot (10^5)^2} = \sqrt[14]{10^{12} \cdot 10^9 \cdot 10^{12} \cdot 10^{10}} = \sqrt[14]{10^{43}} = 1178,8$$

Odpowiedź: Przeciętne stężenie NT-pro BNP w surowicy osób z ostrym zespołem wieńcowym wynosi 1178,8 [pg/ml].

Zadanie 4

Jedno z przedsiębiorstw biotechnologicznych posiada cztery zakłady na terenie kraju. W każdym z zakładów wytwarzany jest ten sam wyrób, ale średnia wydajność pracy w tych zakładach jest różna. W pierwszym zakładzie wynosi 20 szt./h, w drugim 22 szt./h, trzecim 18 szt./h, natomiast w zakładzie czwartym wydajność ta wynosi 25 szt./h. Jaka jest przeciętna wydajność w całym przedsiębiorstwie?

Ponieważ informacje o wydajności pracy w każdym z zakładów podane są w przeliczeniu na stałą jednostkę innej zmiennej, więc skorzystamy tutaj do obliczenia przeciętnej wydajności z wzoru na średnią harmoniczną dla szeregu szczegółowego:

$$M_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{18} + \frac{1}{25}} = \frac{4}{0,191} \approx 20,9$$

Odpowiedź: Przeciętna wydajność w całym przedsiębiorstwie wynosi 20,9 szt./h.

Zadanie 5

Grupę 101 absolwentów pewnej uczelni zbadano ze względu na średnią ocen ze studiów. Trzynastu studentów uzyskało ocenę *ndst*, piętnastu *dst*, trzydziestu *db*, dwudziestu trzech *bdb*, pozostali uzyskali ocenę celującą. Wyznaczyć wartość przeciętną, medianę oraz dominantę ocen ze studiów.

Odpowiedź: Dane zostały przedstawione w postaci szeregu rozdzielczego punktowego, w którym nie występują dane odstające. Wartość przeciętną wynosi więc:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i = \frac{1}{101} \cdot (13 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 23 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = \frac{426}{101} \approx 4,3,$$

mediana $Me = 4$, a dominanta $D = 4$.

Przeciętna ocena ze studiów wynosiła 4,3, połowa studentów miała ocenę mniejszą lub równą *dobry*, a połowa większą lub równą *dobry*. Najczęstszą oceną była ocena *dobra*.

Zestaw II

Zadanie 6

Pewną próbę o liczebności 100, badano pod względem wzrostu, wagi i wieku.

Uzyskano następujące wyniki:

Cecha	As	K	\bar{x}	s^2
Waga [kg]	0,28	0,38	68	16
Wiek [lata]	0,45	0,45	36	9
Wzrost [cm]	0,37	0,17	164	7,84

Która z cech charakteryzuje się: (odpowiedź uzasadnij)

- Więszym zróżnicowaniem wyników?
- Mniejszym skupieniem wokół średniej?
- Więszą symetrią?

Odpowiedź:

a) Aby zbadać, która cecha charakteryzuje się większym zróżnicowaniem wyników należy obliczyć współczynnik zmienności dla każdej cechy:

$V_{swaga} = \frac{\sqrt{16}}{68} \cdot 100\% \approx 6\%$	$V_{swiek} = \frac{\sqrt{9}}{36} \cdot 100\% \approx 11\%$	$V_{swzrost} = \frac{\sqrt{7,84}}{164} \cdot 100\% \approx 2\%$
--	--	---

Największym zróżnicowaniem wyników charakteryzuje się cecha *wiek* (ponieważ współczynnik zmienności jest największy).

b) Najmniejszym skupieniem wokół średniej charakteryzuje się cecha *wzrost* (ponieważ Kurtoza jest najmniejsza).

c) Największą symetrią charakteryzuje się cecha *waga* (ponieważ współczynnik asymetrii jest najmniejszy).

Zadanie 7

Spytano grupę kobiet i mężczyzn o tygodniowy czas poświęcony przez nich na porządki domowe (w godzinach) i uzyskano następujące informacje:

Mężczyźni: 1, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 3, 4, 5, 4.

Kobiety: 4, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 16, 11, 6, 6, 6, 8, 10, 8, 8, 11, 16, 14, 8.

- Która ze zbiorowości charakteryzuje się większym rozproszeniem wyników?
- Ile co najmniej godzin tygodniowo poświęca na porządki domowe co najwyżej 75% badanych kobiet?

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0	5	0	-2,15	4,6225	23,1125
1	2	2	-1,15	1,3225	2,645
2	4	8	-0,15	0,0225	0,09
3	5	15	0,85	0,7225	3,6125
4	2	8	1,85	3,4225	6,845
5	2	10	2,85	8,1225	16,245

Zestaw II

- c) Ile co $\sum n_i = 20$ | $\sum x_i \cdot n_i = 43$ | $\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 52,55$ najwyżej godzin tygodniowo poświęca na porządki domowe co najwyżej 25% badanych mężczyzn?

Odpowiedź:

- a) Mężczyźni:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{43}{20} = 2,15$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i} = \sqrt{\frac{52,55}{19}} = 1,66 \quad V_{SM} = \frac{\hat{s}}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{1,66}{2,15} \cdot 100\% \approx 77\%$$

Kobiety:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
4	1	4	-5,2	27,04	27,04
6	4	24	-3,2	10,24	40,96
8	6	48	-1,2	1,44	8,64
10	4	40	0,8	0,64	2,56
11	2	22	1,8	3,24	6,48
14	1	14	4,8	23,04	23,04
16	2	32	6,8	46,24	92,48
$\sum n_i = 20$		$\sum x_i \cdot n_i = 184$			$\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 201,2$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{184}{20} = 9,2$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i} = \sqrt{\frac{201,2}{19}} = 3,25 \quad V_{SK} = \frac{\hat{s}}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{3,25}{9,2} \cdot 100\% \approx 35\%$$

Więszym rozproszeniem wyników charakteryzuje się zbiorowość dotycząca mężczyzn ($V_{SM} > V_{SK}$).

b) $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{10 + 11}{2} = 10,5$

Co najwyżej 75% badanych kobiet poświęca na porządki domowe co najmniej 10,5 godziny tygodniowo.

c) $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{0 + 7}{2} = 3,5$

Co najwyżej 25% badanych mężczyzn poświęca na porządki domowe co najwyżej 3,5 godziny tygodniowo.

Zestaw II

Zadania domowe

Zadanie 1

Analizując wydajność pracy pewnej brygady pracowników zanotowano następujące ilości wyprodukowanych sztuk na godzinę:

18; 15; 14; 13; 17; 19; 17; 20; 17; 17; 12; 18; 15; 16; 17; 17; 17; 17; 16; 14; 15; 16; 16; 12; 19; 20; 19; 12; 20; 18.

Uporządkować otrzymane dane tworząc szereg rozdzielczy punktowy. Dane przedstawić graficznie w postaci histogramu. Określić przeciętną oraz dominującą wydajność pracy. Określić ile sztuk produkuje więcej niż połowa pracowników. Na podstawie uzyskanych wyników określić czy rozkład danych jest skośny.

Odpowiedź: $\bar{x} = 16,4(3)$, $Me = 17$, $D = 17$.

Zadanie 2

Obserwowano pracę czterech robotników. Robotnik *A* zużywał na wykonanie jednego elementu 2 min, robotnik *B* - 4 min, robotnik *C* - 6 min, a robotnik *D* - 12 min. Ile czasu zużywają średnio badani robotnicy na wykonanie jednego elementu.

Odpowiedź: Stąd jeden element wykonywany jest w ciągu 4 minut.

Zadanie 3

Alicja mieszka 2 km od Uniwersytetu Medycznego. Jeżeli pogoda jest dobra (dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,6), idzie na zajęcia na piechotę z prędkością 5 km/h; w przeciwnym razie jedzie rowerem z prędkością 20 km/h. Jaka jest wartość średnia czasu dotarcia na zajęcia? Jaka jest średnia prędkość Alicji na tej trasie?

Odpowiedź: Średnio Alicja pokonuje drogę z domu na uczelnię w czasie 16,8 minuty. Średnia prędkość wynosi: $\bar{V} = 7,14 \text{ km/h}$.

Zadanie 4

W pewnym przedsiębiorstwie produkcyjnym przeprowadzono badanie pracowników ze względu na staż pracy (w latach). Otrzymano staż dla mężczyzn (średnia \pm odchylenie standardowe) $43,0 \pm 12,3$ oraz dla kobiet $36,0 \pm 9,0$. Przyjmując, że w przedsiębiorstwie było zatrudnionych 1500 kobiet oraz 2500 mężczyzn ocenić przeciętny staż pracy w tym przedsiębiorstwie.

Odpowiedź: Przeciętny staż pracy w tym przedsiębiorstwie wynosi 40,375 lat.

Zestaw II

Zadanie 5*

Dla danych z zadania poprzedniego wyznaczyć odchylenie standardowe przeciętnego stażu pracy w całym przedsiębiorstwie.

Odpowiedź: Odchylenie standardowe przeciętnego stażu pracy w tym przedsiębiorstwie wynosi 11,18 lat.

Zadanie 6

Cena zabiegu mikrodermabrazji wykonywanego w różnych gabinetach w mieście X przedstawiono w tabeli. W Nowym gabinecie postanowiono – na zasadach promocyjnych – wykonać 100 zabiegów, które zostaną sprzedane na zasadzie przedpłaty i sprzedaży grupowej. Wiadomo, że cena takiego zabiegu może być o 40% niższa od ceny regularnej. Jaka jest średnia cena zabiegu mikrodermabrazji w mieście X i czy cena sprzedaży grupowej mieści się w granicach \pm odchylenie standardowe?

Odpowiedź: Grupowa cena sprzedaży nie mieści się w przedziale $150 \pm 25,6$ zł.

Zadanie 7

W nowopowstałym gabinecie przeprowadzono ankietę badającą zadowolenie klientów. Oceniano gabinet w skali 1–5. Najgorszą oceną była 1 a najwyższą 5. 30% klientów wystawiło piątkę, 40% przyznało czwórkę, 8 osób oceniło pracę gabinetu na trójkę, a pozostali przyznali ocenę dopuszczającą (2). Średnia ocen wyniosła 3,9. Ilu klientów postawiło najwyższą ocenę?

Odpowiedź: Najwyższą ocenę wystawiło 12 klientów.